

# 沙垄和沙波非线性演化特征研究

张 贺, 邹志利\*, 徐 杰

(1. 大连理工大学, 辽宁 大连 116024; 2. 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘 要:**沙垄和沙波是陆地河流和海岸河口的常见水底泥沙堆积形态,其形态和演变涉及水流和地形之间很强的非线性作用,导致其产生、演化和形态特征的研究存在较大难度,所以沙垄和沙波的演化特征一直是河流动力学和海洋科学中重要研究课题。采用特征线方法给出了沙垄和沙波剖面形态特征和演化速度随 Froude 数和其幅值的变化特征,分析了地形坡度项和水底摩擦项对沙垄和沙波演化特征的影响,结果表明,沙垄和沙波剖面的演化受地形演化方程的非线性影响较大,后者所导致的剖面形态都是沿顺流方向倾斜,其不因沙波是逆流迁移而改变,这与线性理论的结果不同。该演化特征也受到 Froude 数,水底坡度和水底摩擦的显著影响。这些结果可以为沙垄和沙波的数值模拟分析提供理论参考。

**关键词:**沙垄;沙波;非线性;水流

**中图分类号:**TV142;P737

**文献标识码:**A

**文章编号:**1002-3682(2018)02-0061-12

**doi:**10.3969/j.issn.1002-3682.2018.02.007

沙垄和沙波是河流中常见的水底地貌,海岸河口的河流段也存在着这样的地貌形态<sup>[1]</sup>,类似的地貌形态在海洋中也可观测到(图 1)<sup>[2]</sup>。在我国南海、东海和渤海湾的许多水域也观测到了规模较大的沙垄和沙波<sup>[3]</sup>。这些地形形态的迁移和演化对水底电缆、管道及其它建筑物的稳定性会产生影响。航道内沙垄和沙波的发育可导致航道水深降低,影响通航能力,所需要的航道疏浚会给港口维护带来很大的经济负担。海底沙波的迁移可导致海底输油管线或光缆出现底部掏空,使管线出现悬空,水流流经管道后会引发漩涡释放,产生管道振动,当其自振频率与管道自振频率相近时,管道将发生涡激振动,导致疲劳破坏,威胁管线安全。

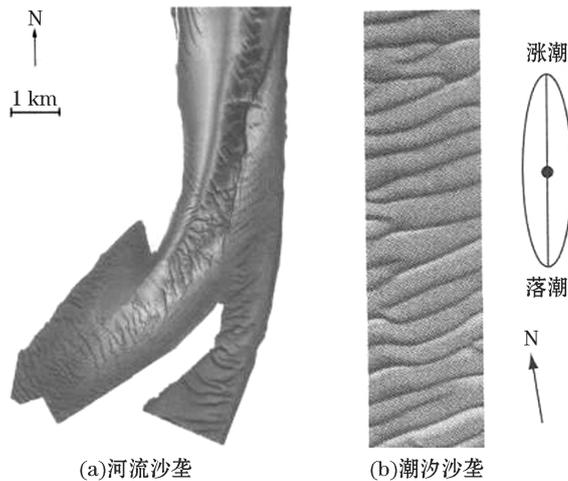


图 1 河流沙垄和潮汐沙垄<sup>[1]</sup>

Fig.1 River sand dunes and tidal sand dunes<sup>[1]</sup>

收稿日期:2017-10-10

资助项目:国家自然科学基金项目——海岸自我恢复能力研究(11272078)

作者简介:张 贺(1990-),男,硕士研究生,主要从事海岸及近海工程方面研究. E-mail:1245698572@qq.com

\* 通讯作者:邹志利(1957-),男,教授,博士,博士生导师,主要从事海岸水动力学和海岸变形方面研究. E-mail:zlzou@dlut.edu.cn

(王佳实 编辑)

沙垄和沙波一直是河流动力学和海洋科学重要研究课题<sup>[4-8]</sup>。以往对沙垄和沙波的研究集中于现场观测<sup>[5]</sup>和对地形不稳定性的理论分析。目前,随着数值计算技术和计算机技术的快速发展,利用数值模拟对沙垄和沙波的演化进行计算分析已成为可能<sup>[9-10]</sup>。另一方面,进行有关的理论分析也是必要的,因为在数值模拟分析中,对计算结果的分析验证仍然需要依赖于对沙垄和沙波性能的理论分析结果。

本文针对沙垄和沙波的非线性演化特征进行了理论分析和数值模拟研究,研究中分别采用特征线方法、高精度数值求解和线性地形不稳定性分析,给出了沙垄和沙波演化的非线性特征、水底坡度的影响和水底摩擦力的影响。

## 1 地形演变方程

水底地形形态的出现是水流和地形相互作用的结果,随着水流强度的增加,水底会产生不同的地形形态,沙垄和沙波分别是对应于中等水流强度( $F < 1$ ,  $F = U/\sqrt{gh}$  为 Froude 数,  $h$  和  $U$  分别为无沙垄和沙波时的水深和流速)和大水流强度( $F > 1$ )的水底地形形态。随着 Froude 数的增大水底地形出现的沙纹—沙垄—沙波—急滩深潭地形形态的转化过程(图 2)。其中,沙波与沙垄存在不同的传播特征,前者是逆流迁移的,对应的水面变化是与沙波同相位的;后者是顺流迁移的,对应的水面变化是与沙垄反相位的。沙垄和沙波这些特征涉及地形和水流的强非线性相互作用,这些作用可采用地形演化方程来进行描述和确定。

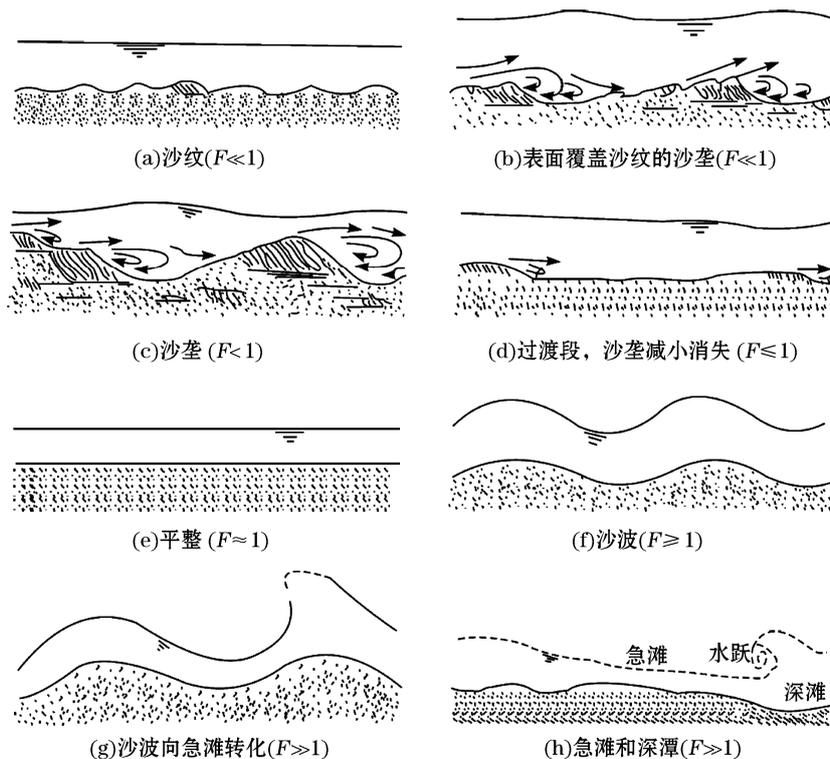


图 2 对应不同水流大小(Froude 数)水底的形态

Fig.2 Bottom morphologic forms under different flow velocities (Froude numbers)

水底地形演变方程可由水底泥沙质量守恒得到(一般称为 Exner 方程)<sup>[11]</sup>

$$(1 - n_p) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

式中,  $x$  和  $t$  分别为空间和时间坐标;  $n_p = 0.4$  为泥沙孔隙率;  $z_b$  为水底升高(m),这里取为沙垄和沙波的高

程; $q$  为泥沙体积输沙率( $\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$ ),其精确表达式的确定目前还处于研究发展阶段<sup>[12-13]</sup>,本研究从简化数学处理考虑,采用目前常用的较为简单的表达式

$$q = mu^n \left(1 - \alpha \frac{\partial z_b}{\partial x}\right), \quad (2)$$

式中, $u$  为流场速度( $\text{m/s}$ ); $m$  为输沙率强度系数( $\text{s}^2/\text{m}$ ); $\alpha$  为坡度项系数,一般可取为 1;这里考虑推移质为主的输沙,所以一般水流情况( $F < 1$ )取  $n = 3$ ,而对强水流情况( $F > 1$ )取  $n = 1$ 。取  $n = 3$  对应于采用能量法建立的推移质输沙率<sup>[14]</sup>,该方法的公式中不含有起动流速的影响,即所考虑的是强水流输沙情况,若采用受力分析方法<sup>[14]</sup>,则所得输沙率(如 Engelund 公式<sup>[14]</sup>)可以考虑起动流速的影响。为了简化分析并不失一般性,本研究采用式(2),其忽略了起动流速,这对形成沙垄和沙波的高强度输沙情况是适合的。计算中发现该取值对  $F > 1$  的情况给出的沙波迁移速度过大,为了得到合理值,对这种情况选取了  $n = 1$ ,其物理意义相当于取输沙率与水流速度成正比,即参与推移质运动的泥沙量(载沙量)近似取为常数,这一假定对于强水流引起的泥沙层移运动是可以接受的,具体计算结果见 2.1 节中讨论。

以上表达式中  $m = 0.001 \text{ s}^2/\text{m}$ <sup>[15]</sup>,该值的合理性可通过 Meyer 和 Muller 公式<sup>[16]</sup>得到了解,即忽略起动流速项(该项数值一般很小),则输沙率公式可以写为式(2)的形式,在所得公式中将计算底摩擦力所采用的水底摩擦系数用谢才系数表达: $C = h^{1/6}/n_r$ , $C$  为谢才系数,当取糙度  $n_r = 0.045$ 、水深  $h = 5 \text{ m}$  时,即可得到参数  $m$  的上述值。

## 2 方程求解

式(1)具有很强非线性的,这可由  $q$  依赖于  $u$ ,而  $u$  又依赖于  $z_b$ (见式(3))看出,这样方程中  $\partial q/\partial x$  与  $z_b$  的关系将不是线性的,而是复杂的非线性关系。这导致方程(1)的求解涉及复杂的数学推导。

$\partial q/\partial x$  与  $z_b$  的非线性关系可通过对水底升高  $z_b$  所引起的流场进行分析得到。对波浪或者潮流这样交替变化流动的情况,流场的求解要考虑到交替水流在沙纹或者沙波两侧产生的垂向流动的 1 对大尺度涡<sup>[17-18]</sup>。由于这里考虑产生沙垄和沙波的河流单向水流的情况,所以地形升高引起的流场不会产生上述垂向流动的大尺度涡,流场确定相对要简单。为此,本研究将  $u$  作为水深平均速度,并分析不考虑水底摩擦影响(势流理论)和考虑水底摩擦影响的两种情况,前者的好处是可以采用特征线法来分析式(1)中非线性所导致的沙垄和沙波的非线性演化,而后者的好处是可以考虑水底摩擦所导致的水流速度(或者输沙率)与地形变化存在的相位差,所以可以考虑地形的不稳定性特征(水流变化超前于地形变化,则地形是不稳定的;水流变化滞后于地形变化,则地形是稳定的)。本节给出不考虑水底摩擦影响的情况的解,分别采用特征线方法和数值求解方法给出,而考虑水底摩擦的解将在下一节给出。这样较全面的描述在以往的研究中还没有见到的,以往的研究中仅有对沙垄剖面形态的理论分析结果<sup>[5,19]</sup>,并且是采用弱非线性理论由摄动展开法得到的,而对沙波目前还没有相应的结果。

### 2.1 特征线方法的解

为了采用特征线方法,这里采用不含水底坡度项的地形演变式(1),并对速度( $u$ )采用简单的表达式,即假定沿水深均匀分布,这样  $u$  的表达式可由水深断面流量守恒  $u(h - z_b + \eta) = Uh$  确定,有

$$u = \frac{Uh}{h + \eta - z_b}, \quad (3)$$

式中, $\eta$  为  $z_b$  所引起的自由表面升高。

为了得到  $\eta$  的表达式,考虑不包含水底摩擦影响的水流动量方程  $u_t + uu_x + g\eta_x = 0$ ( $g$  为重力加速度),将其线性化并忽略对时间的导数项  $u_t$ (因为沙垄和沙波移动速度缓慢,量级为每月几米),则方程可简化为

$$Uu_x + g\eta_x = 0, \quad (4)$$

将  $\eta$  表达为  $\eta = Gz_b$ , 将其代入式(3), 做线性化处理可得  $u \approx U[1 - (G - 1)z_b/h]$ , 将这样得到的  $\eta$  和  $u$  的表达式代入式(4)可得到  $G$  的表达式为

$$G = \frac{F^2}{F^2 - 1}, \quad (5)$$

式中, 对水流流速  $U$  不是很大的沙垄情况,  $F$  是小量,  $z_b$  所引起的自由表面升高  $\eta$  是近似与  $F^2$  成正比的, 且因子  $G$  为负值, 表示水面升高  $\eta$  与水底升高  $z_b$  是反相位的(地形隆起时, 水面降低); 但对水流速度  $U$  很大的沙波情况,  $F > 1$ , 因子  $G$  为正值, 表示水面升高  $\eta$  与水底升高  $z_b$  是同相位的(地形隆起时, 水面也是隆起的)。

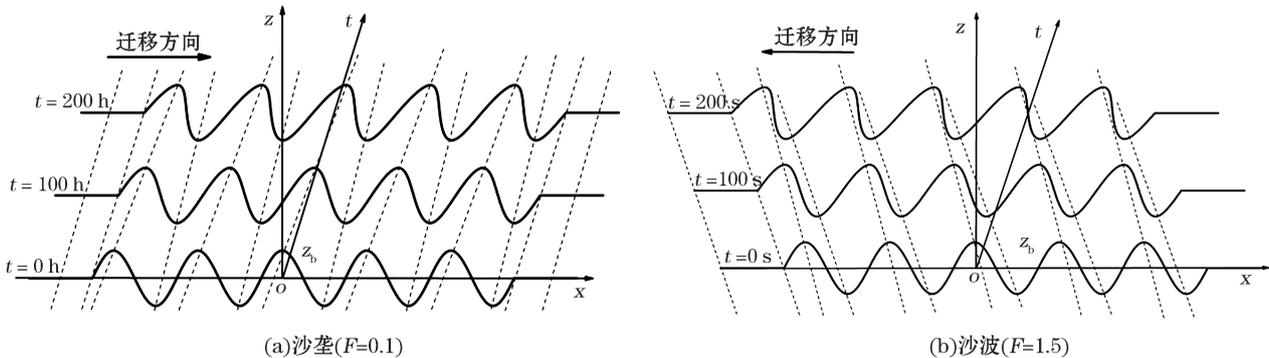
将速度( $u$ )式(3)代入到输沙率式(2), 然后将结果代入式(1), 得到沙垄和沙波控制方程的表达式为

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + c_b \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

式中,  $c_b$  为  $z_b$  的传播速度, 表达式为

$$c_b = \frac{nq_0}{(1 - n_p)h} (1 - G) \left[ 1 - (1 - G) \frac{z_b}{h} \right]^{-(n+1)}, \quad (7)$$

式中,  $q_0 = mU^n$  为无沙垄和沙波时水流的输沙率。由式(7)可见  $c_b$  是  $z_b$  的非线性函数, 体现了沙垄和沙波迁移的非线性特征(此特征没有考虑水面升高  $\eta$  的非线性, 因式(5)是在线性化情况下得到的, 这在水面升高  $\eta$  相比水深是小量的情况下是可以接受的, 不会对下面地形演化非线性特征的结果产生大的影响)。这一非线性特征可应用特征线法来进行数学描述, 对应的特征线方程为  $dx/dt = c_b$ , 其物理意义是在  $x-t$  平面上, 沿轨迹曲线  $dx/dt = c_b$  水底升高  $z_b$  为常数(因为沿该轨迹线有  $dz_b/dt = 0$ )。利用这一结果可以由初始时刻沙垄和沙波的水底升高  $z_b$  的空间变化曲线确定任意时刻  $z_b$  的空间变化曲线, 即追踪水底地形上某一点随时间的运动轨迹, 然后将所有追踪得到的空间点连为 1 条线, 即可得到该时刻  $z_b$  的空间变化曲线(图 3)。



注: 图中虚线为满足  $dx/dt = c_b$  的特征线, 迁移方向为  $c_b$  的方向, 水深为 5 m

图 3 沙垄和沙波迁移时剖面形态的演化

Fig.3 Evolution of profile forms of sand dunes with  $F = 0.1$  and sand waves with  $F = 1.5$

由特征线方法得到的沙垄和沙波剖面在 3 个时刻的演化结果(图 3), 将 5 个沙垄和沙波作为考察对象, 它们在初始时刻为正弦型变化, 幅值  $a = 0.5$  m、波长为 400 m。由图 3 可以看出沙垄和沙波的演化特征:(1) 随着时间的演化, 二者的剖面不再是初始时刻对称的正弦型, 而是呈现出向顺流方向倾斜的不对称形状;(2) 沙垄和沙波迁移的方向是相反的:前者顺流移动, 后者逆流移动。其中, 特征(2)也可以采用线性理论来解释, 这一线性理论的传播速度( $c_b$ )可由式(7)通过忽略非线性项(含  $z_b$  的项, 有关项在式(7)中表现为非线性项)得到

$$c_{b0} = \frac{nq_0}{(1 - n_p)h} (1 - G), \quad (8)$$

式中,  $c_b$  为常数,不再依赖于  $z_b$ 。由式(8)可以更为直接的得到沙垄和沙波传播速度的不同:对沙垄  $G < 0$  (因  $F < 1$ ),有  $c_b > 0$ ,所以沙垄是顺流运动的;对沙波  $G > 0$ (因  $F > 1$ ),而且有  $G > 1$ ,所以有  $c_b < 0$ ,即沙波是逆流运动的。这一特征对式(7)给出的非线性传播速度  $c_b$  仍然保持成立。

与特征(2)不同,特征(1)是典型的非线性特征,因为若是线性理论情况,沙垄和沙波的剖面在迁移的过程中将保持形状不变,即始终具有初始时刻的正弦型形状。这一非线性特征可以由上述特征线理论直接看出。根据特征线理论,沿特征线沙垄和沙波的传播速度  $c_b$  是不变的,这导致由较大水底升高  $z_b$  出发的特征线上的水底升高将以较大的速度迁移,而由较小水底升高  $z_b$  出发的特征线上的水底升高将以较小的速度迁移。所以前者将随着时间逐渐缩小(后者位置位于前者之前)或者增大(后者位置位于前者之后)与后者的距离,这样将导致沙垄和沙波剖面出现左右对称性的改变,即产生顺流倾斜。值得注意的是这一顺流前倾的特征对沙垄和沙波是同样存在的:虽然沙波是逆流移动的,其形状仍然与顺流移动的沙垄一样是顺流倾斜的,而不是向着其移动方向倾斜(逆流倾斜)。这一现象可以由式(7)看出,在式(7)中,当  $F > 1$  和  $G > 1$  时,水底升高  $z_b$  越大,  $|c_b|$  越小(这与沙垄情况不同,后者是  $z_b$  越大,  $|c_b|$  越大),即沙波在迁移过程中,峰值点处迁移速度是落后于波谷的,又由于这时迁移方向是逆流的,这就导致沙波在迁移过程中剖面形态是顺流倾斜的,出现了与沙垄情况相同的剖面形态改变,即两者都是在波峰处都出现了特征线汇聚,导致背流坡面在迁移过程中逐渐压缩变短、坡度变陡,而迎流坡面逐渐拉伸变长、坡度变缓,致使  $z_b$  峰的剖面逐渐出现向顺流方向倾斜的锯齿形态。

为了进一步说明非线性(式(7)中与  $z_b$  有关的项)的影响,下面给出不同 Froude 数时非线性、线性沙垄和沙波迁移速度的比值的结果

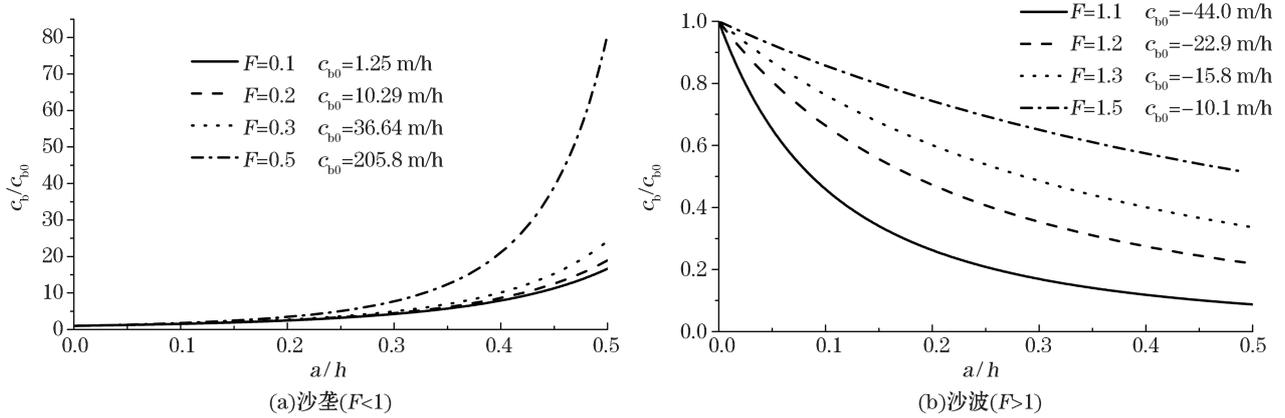
$$\frac{c_b}{c_{b0}} = [1 - (1 - G) \frac{a}{h}]^{-(n+1)}, \quad (9)$$

该式是由式(7)除以式(8)并取  $z_b = a$  得到。计算结果表明,对  $F > 1$  的高速水流情况,若对输沙率( $q$ ) (式(2))中指数  $n$  仍然取为常用的值 3,则所得沙波的迁移速度会过大,如  $F = 1.5, n = 3$  时有  $c_b = -2\ 451$  m/h,而  $n = 1$  时有  $c_b = -8.64$  m/h,所以  $n = 1$  时所得迁移速度是合理的。这表明在高速水流情况下( $F > 1$ ),在输沙率  $q$  的计算中, $n$  应取为 1;而  $F < 1$  时仍然保持取  $n$  的值为 3。由不同 Froude 数时非线性和线性沙垄和沙波迁移速度的比值(图 4)可见,当  $F < 1$  时,随着  $z_b$  幅值相对值  $a/h$  的增加,速度比值是增加的(当  $a/h > 20\%$  的时候,非线性影响变得较为明显);当  $F > 1$  时,这一趋势是减小的。上述减小或者增大的趋势是随着  $a/h$  的增大而更为突出,即非线性影响更大。这些特征也可以直接由式(9)看出:对  $F < 1$ (沙垄),有  $G < 0$ (式(5)),式(9)中分母随着  $a/h$  的增大而减小,从而  $c_b/c_{b0}$  随  $a/h$  的增大而增大;而对于  $F > 1$ (沙波),有  $G > 1$ (式(5)),式(9)中分母变为随着  $a/h$  的增大而增大,从而  $c_b/c_{b0}$  随  $a/h$  的增大而减小。

## 2.2 数值解

上述特征线解法给出的沙垄和沙波剖面随着时间的演化会趋向于形成锯齿形状,甚至会产生“舌状”倾斜。实际上这一情况是不会出现的,因为随着沙垄和沙波的出现和增大,地形坡度也随之出现和增大,这样泥沙会产生顺坡向下的运动,从而导致沙垄和沙波幅值减小、坡度变缓,即出现扩散效应。为了考虑这一地形坡度的影响,需要在输沙率公式中加入与地形坡度有关的项,见式(2)。但考虑这一项之后,特征线方法将不再适用,所以在本研究为克服这一不足,又将输沙率  $q$  取为考虑地形坡度影响的式(2),然后数值求解地形演变式(1),给出考虑地形坡度后的沙垄和沙波随时间演化的特征。

如 2.1 节特征线法所得到的结果一样,地形演化方程所给出的沙垄和沙波的剖面在长期演化之后会出现间断,所以,即使采用数值解也需要采用能够考虑这一间断解的差分方法,即需要采用有“激波捕捉”功能的差分格式。为此这里采用加权基本无震荡(Weighted Essentially Non-Oscillatory)差分格式,该格式是在 ENO(Essentially Non-Oscillatory)构造思想的基础上提出的<sup>[15]</sup>。以往的数值模拟常采用 Lax-Wendroff 差分格式或是以该格式为基础进行改进的格式,但是这些格式在模拟地形长期演变时会出现数值振荡,而采用

图4 沙垄( $F < 1$ )和沙波( $F > 1$ )非线性迁移速度的比值Fig.4 The ratio of nonlinear to linear migration velocities of sand dunes ( $F < 1$ ) and antidunes ( $F > 1$ )

WENO 格式可以克服这些缺点,并且具有在间断区分辨率高、在光滑区计算精度高的优点。对应于该方法的式(1)的差分格式为

$$\frac{z_{bi}^{n+1} - z_{bi}^n}{\Delta t} + \frac{(\hat{q}_{i+1/2} - \hat{q}_{i-1/2})}{\Delta x} = 0, \quad (10)$$

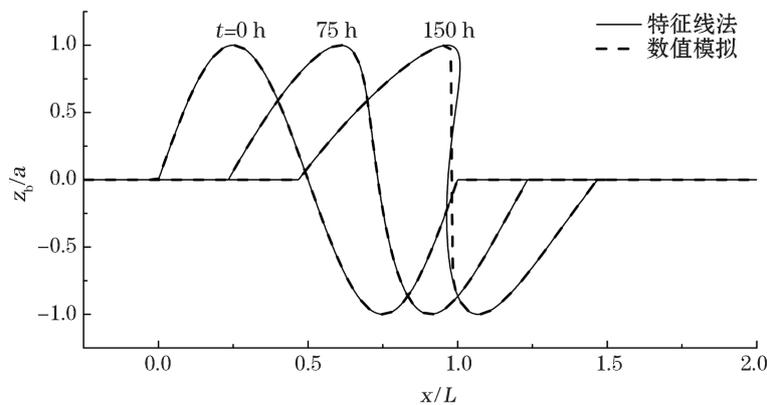
式中,  $\hat{q}_{i+1/2} = \hat{q}_{i+1/2}^+ + \hat{q}_{i+1/2}^-$ , 其中  $\hat{q}_{i+1/2}^+$  和  $\hat{q}_{i+1/2}^-$  的计算方法分别为( $C$  为地形传播速度)

$$\hat{q}_{i+1/2}^+ = \begin{cases} \tilde{\omega}_1 \tilde{q}_{i+1/2}^1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{q}_{i+1/2}^2 + \tilde{\omega}_3 \tilde{q}_{i+1/2}^3 & C_{i+1/2} < 0 \\ 0 & C_{i+1/2} \geq 0 \end{cases}, \quad (11)$$

$$\hat{q}_{i+1/2}^- = \begin{cases} \omega_1 q_{i+1/2}^1 + \omega_2 q_{i+1/2}^2 + \omega_3 q_{i+1/2}^3 & C_{i+1/2} \geq 0 \\ 0 & C_{i+1/2} < 0 \end{cases}, \quad (12)$$

式(11),(12)中右端各变量见参考文献[15]。该数值模型中的水流速度  $u$  继续采用式(3)来确定。

为了说明以上数值方法的精度,通过该方法求解  $F=0.1$  情况  $\alpha=0$  时(不考虑地形坡度)式(1)的数值解与上一节特征线法得到的解的对比(图5)。由图5可见,二者在出现间断解之前吻合是很好的,但出现间断解之后,特征线法给出“舌状”前倾的地形剖面(这一剖面形态在实际中是不会出现的),而数值解给出的地形是接近直立型的间断。这说明该数值方法具有很好的捕捉间断解的性能,适合于求解这里研究的沙垄和沙波演化问题。

图5 沙垄剖面数值模拟结果与特征线法的对比( $F=0.1$ )Fig.5 Comparison between the sand dune profiles given by numerical simulation and by characteristic line method ( $F=0.1$ )

为了考察式(1)输沙率  $q$  中坡度项对沙垄和沙波演化的影响,通过本节数值方法给出式(1)在  $\alpha \neq 0$  时考虑水底坡度影响时的解(图6和图7)。由图6和图7可见, $F=0.1$ 和 $F=1.5$ 的两种情况沙垄( $F=0.1$ )和沙波( $F=1.5$ )剖面随时间演化的结果,对应的初始沙垄和沙波波长都为400 m,高度为0.5 m,图中对应的输沙率计算对 $F < 1$ 取 $n=3$ 、对 $F > 1$ 取 $n=1$ ,图6和图7中分别给出了式(1)中取 $\alpha=0$ 和 $\alpha \neq 0$ 两种情况的解,以便讨论地形坡度的影响,由这两图可以看出随着时间的增大,两者的区别也越来越大,而且当 $\alpha \neq 0$ 时地形的背流面坡度明显变缓,地形高度也发生了衰减。该衰减是由于坡度项的耗散作用,其使沙垄和沙波峰处的泥沙颗粒不断沿坡度下滑,从而引起沙垄高度减小,而宽度增大。图6中沙垄的演化对应较小 $F$ 的情况,对应的流速较低,所以经过200 h沙垄的波峰前部才会出现立陡的形态,这时考虑坡度项的影响后会使得这一变陡的波峰明显减缓:波峰顶尖处仍然能保持平缓的变化,并且波峰高度有一定衰减,但衰减幅值不大(12%)。图7中沙波的演化对应较大 $F$ 的情况,对应的水流流速和输沙率也较大,所以坡度项的影响比图6中的要大的多(因为坡度项与输沙率成正比)。在30 h时,考虑坡度项已经使得沙波的波峰降低到初始时波峰高度的65%(而不考虑坡度的影响,沙波幅值不变)。

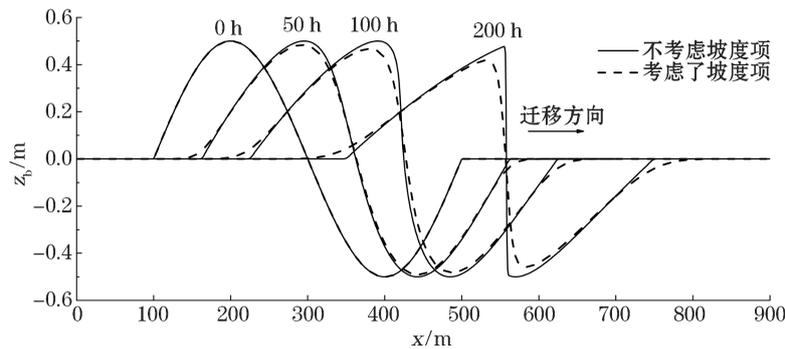


图6 沙垄剖面有无考虑地形坡度项数值模拟结果的对比( $F=0.1, n=3, c_b=-1.91$  m/h)

Fig.6 Comparison between the sand dune profiles simulated with and without the consideration of bottom slope item ( $F=0.1, n=3, c_b=-1.91$  m/h)

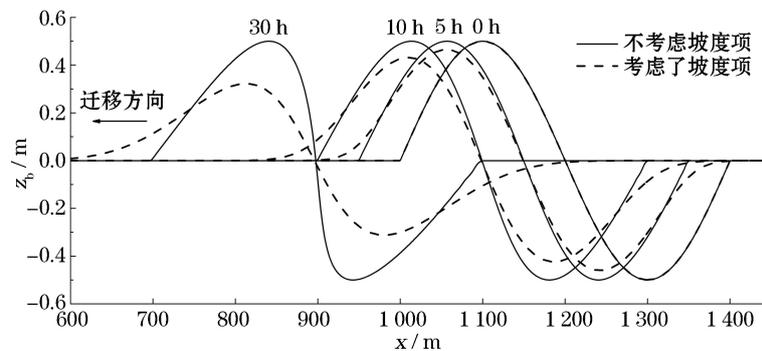


图7 沙波剖面有无考虑地形坡度项数值模拟结果的对比( $F=1.5, n=1, c_b=-8.64$  m/h)

Fig.7 Comparison between the antidune profiles simulated with and without the consideration of bottom slope item ( $F=1.5, n=1, c_b=-8.65$  m/h)

为了进一步说明波峰衰减对 $F$ 的依赖情况,进行了不同 $F$ 值情况1个地形传播周期 $T$ 时间段内的地形峰值点随时间的衰减情况,调查地形传播周期定义为地形的波长 $L$ 与线性传播速度 $c_{b0}$ 的比值: $T=L/c_{b0}$ 。图8中 $L=400$  m, $F=0.1\sim 0.5$ 对应 $T=321\sim 1.9$  h, $F=1.1\sim 1.5$ 对应 $T=9.1\sim 39.7$  h。图8中沙垄和沙波的幅值都是在 $F$ 值越大时衰减的越快,一个传播周期内,沙垄在最大衰减达30%,沙波最大衰减

达 60%，沙波要比沙垄衰减要快，这是由于沙波的  $F$  值较大，对应的水流速度和输沙率较大，因为水底坡度项与输沙率成正比，所以导致沙波波峰衰减要比沙垄快的多。

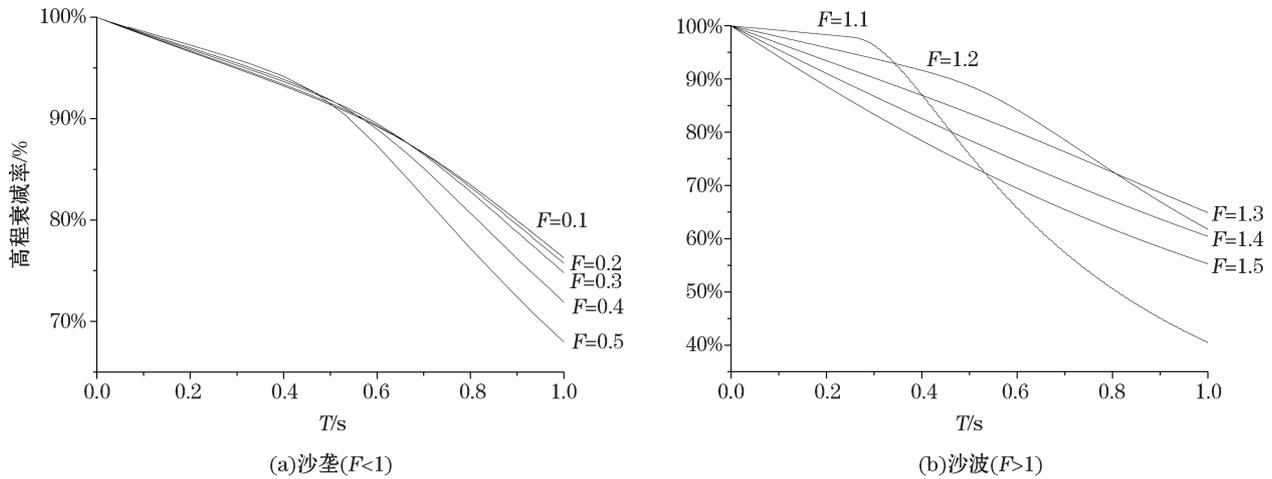


图 8 沙垄( $F < 1$ )和沙波( $F > 1$ )在不同  $F$  取值情况下地形峰值衰减率

Fig.8 Topographic peak attenuation rate of the sand dunes ( $F < 1$ ) and the antidunes ( $F > 1$ ) under different values of  $F$

本研究中图 6, 图 7 和图 8 所给出的沙垄和沙波波峰的衰减都是为了说明输沙率中坡度项的影响, 实际的沙垄和沙波的演变还有可能受到边界层和垂向流速等引起的三维流动特征的影响, 如在沙垄和沙波两侧存在的对称垂向环流, 该环流在水底处的流速是指向沙垄和沙波的波峰的, 所以会引起泥沙逆水底坡度而向地形峰顶处移动, 这会抵消水底坡度引起的泥沙顺水底坡度下滑的趋势, 因而可在一定程度上阻止以上 3 个图中所表现的地形峰值的衰减, 若二者可以相互抵消, 则沙垄和沙波都可以维持 1 个不变的峰值。

### 3 讨 论

本节讨论求解过程中没有考虑的水底摩擦和悬移质输沙率的影响。

#### 3.1 水底摩擦的影响

在上面特征线方法和数值计算求解中, 对地形扰动引起的水面升高  $\eta$  没有考虑水底摩擦的影响, 即得到式(5)时采用的动量方程没有含底摩擦力项。这里通过加入该项来讨论水底摩擦对沙垄和沙波演化的影响。

加入水底摩擦项后水流连续方程和动量方程可以分别表达为

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (du)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_f}{d} |u| u = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $d$  是总水深  $d = h + \eta - z_b$ ,  $c_f$  是水底摩擦力系数。为了求解以上方程, 将速度分解成无地形扰动(沙垄和沙波)速度  $U$  加上地形扰动引起的扰动速度  $u'$ :  $u = U + u'$ , 同样也将水深分解为无地形扰动时水深  $h$  加上地形扰动引起的扰动变化  $h - z_b$ :  $d = h + \eta - z_b$ , 将所得结果代入以上两方程, 忽略时间导数项  $\eta_t$  和  $u_t$  (因  $z_b$  是缓慢变化的), 分解出扰动速度  $u'$ 、水面升高  $\eta$  和水底升高  $z_b$  所满足的方程, 可得(忽略非线性项)

$$h \frac{\partial u'}{\partial x} + U \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) = 0, \quad (14)$$

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c_f \frac{u'}{h} - c_f(\eta - z_b) \frac{U^2}{h^2} = 0, \quad (15)$$

取水底升高  $z_b$  的表达式为  $z_b = a \cos(kx - \sigma t) = \text{Re}\{a e^{i(kx - \sigma t)}\}$ , 式中  $a$ 、 $k$  和  $\sigma$  分别为沙垄和沙波的波幅、波数和圆频率。又由线性化处理式(3)得到的表达式  $u \approx U[1 - (G - 1)z_b/h]$  可得扰动速度  $u'$  表达为  $u' = \chi(U/h)z_b$ , 式中  $\chi = 1 - G$ , 将以上  $z_b$ 、 $u'$  以及  $\eta$  的表达式  $\eta = Gz_b$  (参见式(5))代入式(14)和(15), 可得

$$(ikh + 3c_f)\chi + ikhG/F^2 = 0, \quad (16)$$

将其和  $\chi = 1 - G$  联立可得  $G$  表达式:

$$G = -F^2 \frac{1 - 3i/(kl)}{1 - F^2(1 - 3i/(kl))}, \quad (17)$$

式中,  $l = h/c_f$ , 其表达水底摩擦对应的长度尺度。上式代入关系式  $\chi = 1 - G$  可得  $\chi$  的表达式

$$\chi = \frac{1}{1 - F^2(1 - 3i/(kl))}. \quad (18)$$

首先分析沙垄对应的  $F < 1$  的情况(图 1)。由于  $F < 1$ ,  $G$  和  $\chi$  的式(17)和式(18)可近似为

$$G = -F^2 \left(1 - \frac{3i}{kl}\right), \quad (19)$$

$$\chi = 1 + F^2 - \frac{3i}{kl}F^2, \quad (20)$$

由以上  $G$  和  $\chi$  的表达式可见, 考虑水底摩擦后  $G$  和  $\chi$  的表达式都包含有了虚部项, 这表示水底摩擦力的作用是导致了水面升高  $\eta$ 、扰动速度  $u'$  都与  $z_b$  出现了相位差。将以上  $u'$  的结果代入到输沙率  $q$  的表达式(注意  $u = U + u'$ ), 然后代入式(1), 可得考虑水底摩擦力后的传播速度  $c_b$  的表达式(参见式(6))

$$c_b = \frac{nq_0}{h}\chi = \frac{nq_0}{h} \left(1 + F^2 - \frac{3iF^2}{kl}\right), \quad (21)$$

可见水底摩擦力的影响是使传播速度  $c_b$  的表达式也包含有了虚部项, 该项的物理意义可以通过对应的水底升高  $z_b$  的波动频率的表达式看出, 即

$$\sigma = kc_b = k \frac{nq_0}{h} \left(1 + F^2 - \frac{3iF^2}{kl}\right) = \sigma_r + i\sigma_i, \quad (22)$$

式中, 频率的实部和虚部分别为  $\sigma_r = (1 + F^2) \frac{nkq_0}{h}$ ,  $\sigma_i = -\frac{nkq_0}{h} \left(\frac{3F^2}{kl}\right)$ 。将式(22)代入到上述水底升高  $z_b$  表达式可知, 在考虑水底摩擦力后, 频率  $\sigma$  虚部表示地形升高  $z_b$  的幅值, 将不再是常数, 而是随时间按指数  $e^{\sigma_i t}$  变化的。由于  $\sigma_i < 0$ , 所以水底升高的幅值是随时间衰减的, 这就是考虑水底摩擦后水底地形变化受到的影响。

其次分析  $F > 1$  的沙波的情况。由于  $F > 1$ , 对应的  $\chi$  的式(18)可以写为

$$\chi = \frac{1 - F^2 - 3iF^2/kl}{(1 - F^2)^2 + (3F^2/kl)^2}, \quad (23)$$

将式(23)代入式(21), 从而可得水底升高的波动频率  $\sigma$  的结果, 频率的实部和虚部分别为  $\sigma_r = \frac{nkq_0}{h} \frac{1 - F^2}{(1 - F^2)^2 + (3F^2/kl)^2}$ ,  $\sigma_i = -\frac{nkq_0}{hkl} \frac{3F^2}{(1 - F^2)^2 + (3F^2/kl)^2}$ , 由此可知也存在  $\sigma_i < 0$  的情况, 所以对应的  $z_b$  的幅值跟沙垄一样也是衰减的。

因为以上分析所采用的式(13)是在一般地形演化计算中常常采用的水流控制方程, 所以以上水底摩擦力的影响在很多地形演变数值模拟结果中都将是存在的, 对数值模拟结果的分析具有指导意义。这一意义的重要性体现在: 以上分析所给出的地形演化结果, 即幅值随时间发生衰减, 事实上是与沙垄和沙波的实际演化情况不符合。这一幅值衰减的结果意味着水底地形在受到如沙垄和沙波形式的扰动后是稳定的, 即随着时间的演化沙垄和沙波将逐渐消失, 水底最终会恢复到平整的状态。这一结果与实际沙垄和沙波会保

持长久的存在是不符合的,即实际上水底地形受到如沙垄和沙波形式的扰动后是不稳定的<sup>[6]</sup>,幅值在初始阶段是增长的( $\sigma_i > 0$ ),但最后由于地形演化中存在非线性作用而导致幅值最终趋于 1 个有限值<sup>[7]</sup>。

产生以上不符合实际的地形演化趋势的原因是水流方程(13a,b)采用了沿水深均匀的水流流速的假定,而对于沙垄和沙波的演化分析,特别是地形不稳定性分析,水流流动的三维特征将起决定性的作用。这一决定性的作用在沙垄和沙波的较精确的地形不稳定性分析中已经得到了理论结果的证实<sup>[6-8]</sup>。该理论的主要结果是:围绕沙垄和沙波的水流流动涉及到沿垂向变化的湍流流动,这导致沙垄和沙波上水流剪切应力和输沙率存在超前于水底地形变化的相位差(而不是上面水深平均模型得到的滞后的相位差),因而导致输沙率在跨越沙垄和沙波波峰时是减小的,因而会造成沙垄和沙波波峰处产生淤积,导致沙垄和沙波波峰是增长的,而不是上面所述的衰减的结果。这一增长发展到一定程度会出现停止,因为按 2.2 节所给出的水底坡度的影响,由于水底坡度的存在,泥沙重力会导致这一地形幅值逐渐减小,当该减少与上述地形不稳定性的增长相平衡时,地形幅值将不再增长,而保持为常数,从而形成稳定的沙垄和沙波剖面形态。采用式(13)不能够考虑上述沿垂向变化的水流湍流运动,因其仅是通过水底摩擦力表现水流的粘性效应的影响,所以给出的地形在沙垄和沙波型扰动下是稳定的这一不符合实际的结果。但注意到该结果中的幅值衰减在  $F \ll 1$  时是很弱的(因为衰减率  $\sigma_i$  与  $F^2$  成正比),所以在  $F$  值很小的情况,以上不符合实际的摩擦力影响的结果所产生的影响是不大的。而对  $F > 1$  的沙波情况,这一影响将是可观的。所以,这一问题在采用式(13)来进行计算模拟时应引起注意,即若计算所得沙垄和沙波的幅值是随时间衰减的,则其产生的原因有可能是采用了式(13)本身所带来的,若采用可以考虑水流湍流三维运动的方程,则所得结果可能不是这样的。

### 3.2 悬移质输沙率的影响

以上分析中仅考虑了推移质输沙率,忽略了悬移质输沙率,因此这里对悬移质的影响进行补充说明。对沙波,由于其对应于  $F > 1$  的情况,对应水流流速较大,这时悬移质所占的比例要大大增加,所以悬移质可能对沙波地形的演变存在影响。这表现在两方面:1)  $F > 1$  的情况可能出现水底泥沙以层移状态运动,对于这种情况本文计算表明输沙率表达式(2)中的指数取为  $n = 1$  而不是取一般的值  $n = 3$  更能够得到合理大小的泥沙迁移速度;2) 悬移质输沙率沿空间上的变化滞后于地形沿空间的变化。所以,悬移质输沙会导致沙波幅值逐渐衰减<sup>[20]</sup>,非线性的影响减弱,2.2 节的结果中沙波地形顺流倾斜的趋势也将减弱,沙波剖面将更趋于前后对称。

对沙垄,其对应的  $F < 1$ ,水流流速较小,对应的泥沙悬浮指标  $\omega / (\kappa u_*')$  ( $\omega$  为泥沙沉速,  $u_*'$  为摩阻流速,其正比于水流速度,  $\kappa = 0.4$ ) 较大,因而泥沙悬移量较小<sup>[14]</sup>,这时,相比于悬移质,推移质输沙率对地形变形影响较大,所以仅考虑推移质而不考虑悬移质是适当的,这也意味着本研究给出的沙垄剖面顺流倾斜的形态在定量上也将是合适的。

## 4 结 论

本研究通过特征线法和数值求解方法研究了地形演变方程中非线性对沙垄和沙波地形形态的影响,并讨论了在输沙率中考虑坡度项后对分析结果的影响以及水底摩擦力的影响。主要结论如下:

1) 地形演化方程的非线性所导致的沙垄和沙波在迁移过程中的剖面形态的改变是一致的,即沙垄和沙波剖面都是沿顺流方向倾斜,这一倾斜并不因沙波是逆流迁移而改变。这一结果与线性理论沙垄和沙波在迁移过程中形态保持不变是不同的。

2) 地形演化方程的非线性所导致的另一个沙垄和沙波的演化特征是沙垄的迁移速度比线性时的要大,而沙波的迁移速度比线性时的要小,这一变大和变小的趋势随着 Froude 数  $F$  的增大而变得更为快速。

3) 在考虑地形坡度项的情况下,以上的 2 个特征依然存在,只是由于坡度项所产生的耗散效应引起了沙垄和沙波幅值沿程衰减,所以上述非线性特征有所减弱,并且也使得剖面向舌状发展的趋势得到了一定程

度的遏制。但在数值模拟中,仍然需要具有间断捕捉功能的高精度差分格式来较精确计算沙垄和沙波剖面所存在的向间断解发展的趋势。

4) 采用水平一维水流计算模型(式(13)),并由水底摩擦来考虑粘性影响,则所得到的沙垄和沙波的幅值是与实际情况有一定差别的,这表现在 2 个方面:一是地形不稳定性影响。实际的沙垄和沙波的演化在初始发展阶段幅值应当是增长的<sup>[4-8]</sup>,但采用水平一维水流计算模型所得到的沙垄和沙波幅值是按指数衰减的,即沙垄和沙波的发展不存在地形不稳定性问题。注意到上述水平一维模型仍然常常在数值模拟中得到应用,所以上述不符合实际的沙垄和沙波的衰减的数值结果应引起注意。二是垂向流动的影响。垄和沙波两侧存在的对称垂向环流会抵消水底坡度所引起的泥沙顺水底坡度下滑的趋势,从而会减少或消除沙垄和沙波波峰的衰减。所以,为了得到与实际相符合的数值计算结果,沙垄和沙波演化的计算需要采用可以考虑湍流引起的垂向二维流动的模式<sup>[6-8]</sup>。

以上结论 1)和 2)是在没有考虑水底摩擦影响情况下得到的,但这并不影响所得到的这些结论,因为水底摩擦主要贡献是导致的地形不稳定性,而对于地形剖面演化和地形传播速度影响很小。

### 参考文献 (References):

- [1] XIA H Y, LIU Y Q, YANG Y. The internal wave characteristics of sand waves area in northern of the South China Sea and its effect on the sand movement [J]. *Journal of Tropical Oceanography*, 2009, 28(6): 15-22. 夏华永, 刘愉强, 杨阳. 南海北部沙波区海底强流的内波特征及其对沙波运动的影响[J]. *热带海洋学报*, 2009, 28(6): 15-22.
- [2] DRONKERS J. *Dynamics of coastal systems*[M]. New Jersey: World Scientific, 2005.
- [3] WANG Y H, SHEN H T, LI J F. The characteristics of sand waves and sand transport in the channel of the Yangtze River estuary. *Oceanologia et Limnologia Sinica*, 2011, 42(2): 330-336. 王永红, 沈焕庭, 李九发. 长江河口涨、落潮槽内的沙波地貌和输移特征. *海洋与湖沼*, 2011, 42(2): 330-336.
- [4] KENNEDY J F. The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1963, 16(04): 521-544.
- [5] QU J, HAN Q, DONG G. A study of the characteristics of aeolian sand activity and the effects of a comprehensive protective system in a coastal dune area in southern China[J]. *Coastal Engineering*, 2013, 77(8): 28-39.
- [6] COLOMBINI M. Revisiting the linear theory of sand dune formation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, 502: 1-16.
- [7] COLOMBINI M, STOCCHINO A. Finite-amplitude river dunes[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, 611: 283-306.
- [8] COLOMBINI M, STOCCHINO A. Ripple and dune formation in rivers[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, 673: 121-131.
- [9] JIANG J H, ZHANG L R. Numerical modeling of turbulent flow over sandwaves and their developing trends under tidal currents[J]. *Marina Science Bulletin*, 1995, 14(1): 29-36. 蒋建华, 张立人. 沙波湍流场数值模拟及沙波运动趋势探讨[J]. *海洋通报*, 1995, 14(1): 29-36.
- [10] JIANG W B, LIN M. Application of grid-nesting technique on sand waves migration simulation I——Ultra-high resolution 3D current simulation[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2011, 54(6): 1679-1689. 江文滨, 林緬. 网格嵌套技术在模拟海底沙波运移中的应用 I——超高分辨率海洋三维流场模拟[J]. *地球物理学报*, 2011, 54(6): 1679-1689.
- [11] EXNER F M. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen[J]. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien Abt. IIa*, 1925, 134: 165-203.
- [12] ZHAN Y Z, LU J Y, TANG H W. Basic control equations and their solutions of sand wave movement[J]. *Journal of Sediment Research*, 2014(6): 6-11. 詹义正, 卢金友, 唐洪武. 沙波运动基本控制方程及其解[J]. *泥沙研究*, 2014(6): 6-11.
- [13] BAI Y C, XU H Y, XU D. Nonlinear dynamic characteristics of bed load movement[J]. *Chinese Science: Technology Science*, 2006, 36(7): 751-772. 白玉川, 徐海珏, 许栋. 推移质运动过程的非线性动力学特性[J]. *中国科学:技术科学*, 2006, 36(7): 751-772.
- [14] ZOU Z L. *Coastal dynamics*[M]. Beijing: China Communication Press, 2009. 邹志利. *海岸动力学* [M]. 北京:人民交通出版社, 2009.
- [15] LONG W, KIRBY J T, SHAO Z. A numerical scheme for morphological bed level calculations[J]. *Coastal Engineering*, 2008, 55(2): 167-180.
- [16] MEYER-P, MULLER, R. Formulas for bed-load transport[R]. Stockholm: Rep. 2nd Meet. Int. Assoc. Hydraul. Struct. Res., 1948: 39-64.
- [17] GERKEMA T. A linear stability analysis of tidally generated sand waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, 417(1): 303-322.
- [18] BLONDEAUX P. Sand ripples under sea waves Part 1. Ripple formation[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, 218: 1-17.
- [19] FREDSOE J, SEMINARA G. On the convective nature of bar instability[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 487(1): 125-146

[20] ENGELUND F, FREDSOE J. Sediment ripples and dunes[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1982, 14(1): 13-37.

## Study on the Nonlinear Evolution of Sand Dunes and Antidunes

ZHANG He, Zou Zhi-Li, XU Jie

(1. *Dalian University of Technology*, Dalian 116024, China;

2. *The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering*, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Sand dunes and antidunes are bottom sediment accumulation forms commonly observed in rivers and estuaries. Their morphology and evolution involve strong nonlinear interaction between water flow and topography so that it is difficult to study their generation, evolution and morphological features. As a result, the evolution characteristics of the sand dunes and antidunes have been becoming an important subject in river dynamics and marine science. In the present paper, a characteristic line method is applied to give the profile morphological characteristics and the variation of evolution rate with froude number and amplitude of the sand dunes and antidunes. And then, the effects of the bed slope and bottom friction on the evolution of sand dunes and antidunes are analyzed. The results show that the evolution of the profiles of sand dunes and antidunes are more strongly influenced by the nonlinear terms in the topography evolution equation. The profile forms caused by the latter are all tilted along the downstream direction, which does not change because of the countercurrent migration of antidunes. This is different from the result given by the linear theory. Such evolution feature is also greatly affected by the Froude number, the bed slope and the bottom friction. The present study can provide theoretical references for the numerical simulation of sand dunes and antidunes.

**Key words:** sand dune; antidune; nonlinear; water flow

**Received:** October 10, 2017